Možnosti pochopení pojmu nekonečno u budoucích učitelů prvního stupně základní školy

Jaroslav Beránek

Abstrakt: Příspěvek ukazuje na nutnost správného pochopení pojmu nekonečna u budoucích učitelů 1. stupně základní školy. Za tímto účelem je uvedena řada zajímavých historických příkladů.
Klíčová slova: Aktuální a potenciální nekonečno, nekonečné množiny, nekonečné řady.

Abstract: The article shows the necessity of correct understanding of the notion infinity by the future primary school teachers. Several interesting historical examples are given to illustrate the fact.
Key words: Actual and potential infinite, infinite sets, infinite series.

BERÁNEK, J. 2011. Možnosti pochopení pojmu nekonečno u budoucích učitelů prvního stupně základní školy. *Arnica 2011, 1*, 1–6. Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň. ISSN 1804-8366.
Rukopis došel 20. února 2011; byl přijat po recenzi 6. dubna 2011.

Jaroslav Beránek, Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita, Poříčí 7, 603 00 Brno; e-mail: beranek@ped.muni.cz

Úvod

Pojem nekonečna patří k základním pojmům vyšší matematiky. Proto je problematice nekonečna a jeho chápání u studentů, budoucích učitelů 1. stupně ZŠ, věnován tento příspěvek. Důvodem jeho zařazení je mj. to, že často jediná vědomost o nekonečných množinách u budoucích učitelů 1. stupně ZŠ je zredukována pouze na znalost definice nekonečné množiny („Nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou vlastní podmnožinou“), a to mnohdy jen formální. Zkreslené představy o nekonečnu a nekonečných souborech u studentů mohou pak následně u jejich žáků vyvolat různé úvahy o nadpřirozenu apod., což pak ztěžuje na vyšších stupních škol správné pochopení těch pojmů, které jsou na nekonečných procesech založeny (nekonečné řady, limitní procesy, určitý integrál, teorie míry, konstrukce reálných čísel apod.). Proto ty znalosti o nekonečnu, které považují dnešní matematici při studiu odborné literatury a svém vědeckém bádání za důležité a samozřejmé, je nutno s budoucími učiteli důkladně prodiskutovat. Přestože se jedná o otázky známé, je pro úplnost nyní uveden stručný historický přehled (volně převzato z publikace Drábek 1985).

Historický přehled

Problémům nekonečna a způsobu jeho interpretace se věnovali učenci již od starověku. Matematické nekonečno je jednotou svých dvou protikladných forem - potenciálního a aktuálního nekonečna. Potenciální nekonečno, které je výsledkem abstrakce potenciální uskutečnitelnosti, znamená neustálé překonávání libovolné hranice. Poprvé se s potenciálním nekonečnem setkáváme u Anaxagora v jeho koncepci dělitelnosti těles. Potenciální nekonečno je neomezený proces sestrojování matematických objektů, ve kterém neexistuje poslední krok; po n-tém kroku je vždy možné realizovat $(n+1)$-krok. Prvky potenciálního nekonečna neexistují současně, ale vznikají postupně v procesu konstrukce (např. množina přirozených čísel generovaná pomocí Peanových axiomů). Potenciální nekonečno patří k základním pojmům matematiky. Např. při definici limity je v zápisech $n \to 0$, $n \to \infty$ obsaženo potenciálně nekonečné „přibližování“ čísla n k nule, resp. jeho vzrůstání nad všechny meze. Na potenciálním nekonečnu jsou založeny např. rekurentní definice pojmů nebo důkaz matematickou indukcí, dále např. problémy řešené pomocí výpočetní techniky (žádný algoritmus nemůže vyprodukovat aktuálně nekonečnou množinu).

Aktuální nekonečno je výsledkem abstrakce absolutní uskutečnitelnosti. Podle této teorie všechny prvky nekonečných množin existují současně v daném okamžiku. Existence aktuálních nekonečných souborů není spojena s konstrukcí, ale je zajištěna čistě definitoricky (myšlenkově). Jak ukážeme v dalším textu, pojetí aktuálního nekonečna vede k řadě příkladů, na první pohled zcela paradoxních. Těžko si lze intuitivně představit existenci všech prvků nekonečného objektu v daném okamžiku, tím méně je možné usuzovat na vlastnosti tohoto objektu využitím analogie z konečných souborů (opět uvidíme dále na příkladu součtu nekonečných řad). Proti pojetí aktuálního nekonečna vystupoval již Aristoteles, dále celá řada předních matematiků jako Gauss, Kronecker, Poincaré. Na druhé straně však mnozí matematikové bojovali za uznání aktuálního nekonečna (např. B. Bolzano). Aktuální nekonečno má značný význam v teorii množin. Toto pojetí umožnilo např. Dedekindovi definovat nekonečnou množinu jako množinu, která je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou. Pojem mohutnosti, zavedený Cantorem, umožnil porovnávání nekonečných množin. Cantor pomocí diagonální metody dokázal, že mohutnost kontinua je větší než mohutnost množiny všech přirozených čísel. Mohutnost kontinua však nepředstavuje největší mohutnost množiny – největší mohutnost neexistuje. Aktuální nekonečno dalo teorii množin výjimečnou obecnost a abstraktnost. Je v matematických teoriích obsaženo už tím, že vyslovená a dokázaná tvrzení platí pro všechny objekty (číselné množiny, geometrické útvary, ...). Pojem aktuálního nekonečna je nutný pro vyjádření obecnosti matematických zákonů; podle Fraenkela bylo v matematice uznání aktuálního nekonečna stejně převratné jako vznik teorie relativity ve fyzice.

Tolik krátký historický přehled. I když může v příspěvku působit nadbytečně, ukazuje na problémy, na které je nutno při výuce budoucích učitelů poukázat. Jistě není vhodné zařadit do kurrikula výuky na 1. stupni ZŠ problematiku nekonečna a nekonečných souborů, není ale ani možné se těmto otázkám vyhýbat. Žádný učitel ani rodič není ušetřen zvídaných dětských otázek. Při výuce budoucích učitelů 1. stupně ZŠ samozřejmě nejde ani tak o hluboké odborné znalosti kardinální a ordinální aritmetiky (např. diskuse o hypotéze kontinua), jako o získání potřebného nadhledu a souvislostí.

Nekonečno ve škole

Všimněme si ještě velmi krátce možností chápání pojmu nekonečno u žáků 1. stupně základní školy. Jejich výzkumem se zabývala řada matematiků, u nás v poslední době např. P. Eisenmann (Eisenmann 2001, 2002, 2003) a D. Jirotková (Jirotková 1998). Existuje výzkum, realizovaný P. Eisenmannem, týkající se vývoje představ žáků základních škol o mohutnosti a ohraničenosti množin v geometrii a vývoje představ žáků o uspořádání množiny přirozených, celých a racionálních čísel. Výsledky výzkumu lze nalézt v publikacích P. Eisenmanna (2001, 2002). Nebudeme je proto uvádět, poznamenáme pouze z výzkumu plynoucí fakt, že žáci chápají nekonečno spíše potenciálně (Eisenmann 2003, s. 92), přestože podle Hejného (Hejný 1990, s. 257) se žákům předkládá fenomén nekonečna převážně v aktualizované podobě (přímka, rovina, číselné obory). Žákům je přitom potenciální přístup bližší, je ale málo rozvíjený.

Jak již bylo naznačeno, cílem příspěvku je uvést řadu příkladů, které je vhodné a žádoucí řešit s budoucími učiteli 1. stupně ZŠ, např. ve speciálním semináři z matematiky. Zejména se jedná o správné pochopení aktuálního nekonečna, jehož uznání přineslo v minulosti řadu zajímavých matematických výsledků, které lze pomocí „klasického" úsudku jen těžko pochopit. Ukážeme některé z nich (další např. Konforovič 1989, Vilenkin 1971).

Úvodní dva problémy jsou „klasické" a jejich řešení nebudeme vzhledem k rozsahu uvádět (viz např. Vilenkin 1971). Prvním je „problém ubytování nově příchozího hosta v plně obsazeném hotelu o nekonečně mnoha pokojích", dalším je užití Cantorovy diagonální metody při důkazu nespočetnosti množiny všech reálných čísel. Nyní obrátíme svoji pozornost k problematice nekonečných řad.

Příkladem, který nechybí snad v žádné učebnici matematické analýzy, je harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Tato nekonečná řada slouží jako protipříklad k tomu že nelze obrátit tuto matematickou větu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{je konvergentní} \Rightarrow a_n \to 0 .$$

Přestože se n-tý člen blíží k nule, je tato řada divergentní. Ukážeme jednoduchý důkaz, přístupný i středoškolákům (viz Konforovič 1989). Počínaje od třetího členu seskupíme členy řady postupně po 2, 4, 8, ..., 2^{k-1} členech takto:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\ldots$$

Součet v každé závorce je větší než $\frac{1}{2}$. Označíme-li n-tý částečný součet harmonické řady jako S_n, dostaneme $S_{2^k} > k\cdot\frac{1}{2}$. To znamená že řada diverguje. Uvedený důkaz pochází od Nicole Oresmeho (1323–1382) (viz Konforovič 1989). Harmonická řada diverguje ovšem velmi pomalu. Např. $S_{1000} \doteq 7,485$ $S_{10^6} \doteq 14,393$.

V souvislosti s harmonickou řadou je pro studenty zajímavé si uvědomit, že „podobně" definovaná nekonečná geometrická řada s prvním členem 1, pro jejíž kvocient q platí $-1 < q < 1$, je konvergentní a dokonce existuje explicitní vzorec pro její součet. Připomeňme ještě další nekonečnou řadu tvaru $1-1+1-1+1-1+\ldots$, která není konvergentní ani divergentní. Její součet

s neexistuje, neboť vhodným přerovnáním lze dostat jako součet této řady různá čísla, např.

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0\,,$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1\,,$$

$$1-(1-1+1-1+1-1+\ldots)=s\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-s=s\Rightarrow s=\frac{1}{2}.$$

Připomeňme jen, že řešení součtu nekonečných řad je umožněno uznáním aktuálního nekonečna, kdy na nekonečnou řadu „pohlížíme" jako na celek.

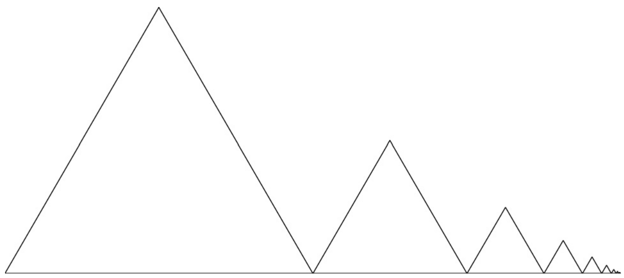
Od N. Oresmeho pochází i další příklad (viz Konforovič 1989), využívající konvergentní geometrickou řadu. Obsahem tohoto příkladu je konstrukce geometrického obrazce, který má nekonečný obvod, ale konečný obsah, což je opět pro laickou představu obtížné. Vytvoříme tedy obrazec utvořený z nekonečně mnoha pravoúhelníků, jejichž délky vodorovných stran se zmenšují v poměru 4 : 1 a délky jejich svislých stran se zvětšují v poměru 2 : 1. Tyto pravoúhelníky se nepřekrývají, jejich vodorovné strany leží na jedné polopřímce a každé dva sousední mají společné svislé strany rovněž na jedné polopřímce. Pro lepší představu označíme jejich vrcholy a pravoúhelníky popíšeme, viz obrázek (původ Konforovič 1989, s. 119).

První obdélník ABB_1A_1 má rozměry 48 × 1, druhý obdélník BCC_2B_2 má rozměry 12 × 2, třetí CDD_3C_3 rozměry 3 × 4, čtvrtý DEE_4D_4 rozměry 0,75 × 8, atd., přičemž body A, B, C, D, E, ... leží na jedné přímce a délka úsečky AB je 48, délka úsečky BC je 12, délka úsečky CD je 3, délka úsečky DE je 0,75, atd. Obsah celého tohoto geometrického útvaru lze určit jako součet obsahů nekonečně mnoha pravoúhelníků takto:

$$48 + 24 + 12 + 6 + \ldots\,,$$

což je nekonečná geometrická řada se součtem $s = 96$. Popsaný útvar tedy má skutečně nekonečný obvod a konečný obsah. Pro pochopení této úlohy je opět nutné uznání aktuálního nekonečna (daný útvar existuje pouze v myšlenkách – nikdo ho nikdy nemůže zkonstruovat).

Mezi další vhodné příklady patří ukázka reálné funkce, která má na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nekonečně mnoho bodů maxima a minima. Poznamenejme, že opět u studentů nejde a přesný formální popis, ale spíše o populární formu pochopení. Stručně tedy popíšeme populární formou graf takové funkce f (viz Vilenkin 1971). Rozpůlíme daný interval a nad jeho levou polovinou sestrojíme rovnostranný trojúhelník. Pravou polovinu opět rozdělíme na poloviny a nad intervalem $\left\langle \frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\rangle$ sestrojíme další rovnostranný trojúhelník. Popsaný postup opakujeme nekonečněkrát, nakonec dodefinujeme $f(1)=0$. Grafem hledané funkce f bude sjednocení hranic všech těchto nekonečně mnoha rovnostranných trojúhelníků, od kterého je odečtena úsečka zobrazující interval $\langle 0,1\rangle$, Ilustrace je na obrázku (původ Vilenkin 1971, s. 73).



Uvažovaným bodem, v jehož okolí existuje nekonečně mnoho bodů maxima a minima, je bod $x = 1$. Pro studenty (zájemce) je nyní užitečným cvičením vyjádřit analyticky funkční předpis této funkce.

Na intervalu $I_1=\left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle$ platí $y=\sqrt{3}\cdot x$,

na $I_2=\left\langle \frac{1}{4},\frac{2}{4}\right\rangle$ platí $y=-\sqrt{3}\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{2}$, pro $I_3=\left\langle \frac{4}{8},\frac{5}{8}\right\rangle$ je $y=\sqrt{3}\cdot x-\frac{\sqrt{3}}{2}$, pro $I_4=\left\langle \frac{5}{8},\frac{6}{8}\right\rangle$ je $y=-\sqrt{3}\cdot x+\frac{3\sqrt{3}}{4}$, atd.

Obecně pro $n = 2, 3, 4, \ldots$ v intervalu $\left\langle \frac{2^n-4}{2^n},\frac{2^n-3}{2^n}\right\rangle$ platí $y=\sqrt{3}\cdot x+\frac{4-2^n}{2^n}\sqrt{3}$,

v intervalu $\left\langle \frac{2^n-3}{2^n},\frac{2^n-2}{2^n}\right\rangle$ platí

$$y=-\sqrt{3}\cdot x+\frac{2^n-2}{2^n}\sqrt{3}\,.$$

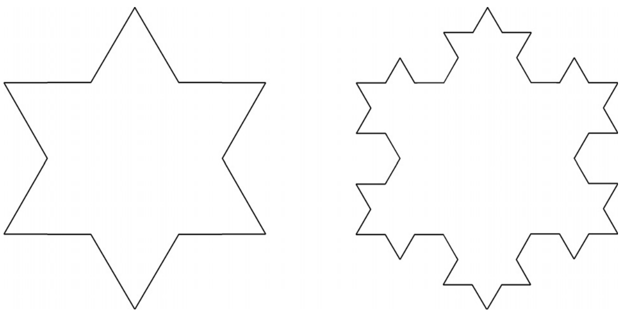
Teprve později byla nalezena funkce

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x} & \text{pro } x\neq 0\\ 0 & \text{pro } x=0\,,\end{cases}$$

která má rovněž v intervalu $\langle 0,1\rangle$ nekonečně mnoho bodů maxima a minima.

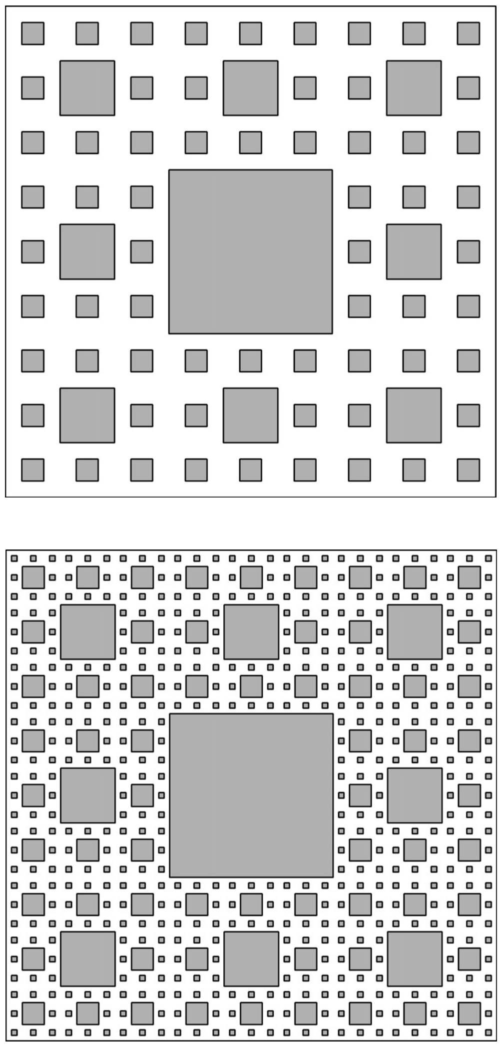
Další, ještě podivuhodnější množinu, sestrojil G. Cantor, po kterém se tato množina nazývá Cantorova, někdy též Cantorovo diskontinuum (opět viz Vilenkin 1971). Na rozdíl od předchozí funkce, která obsahovala pouze jeden bod intervalu $\langle 0, 1\rangle$, v jehož okolí existuje nekonečně mnoho maxim a minim ($x = 1$), obsahuje Cantorova množina na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nekonečně mnoho takovýchto bodů. Přesnou definici Cantorovy množiny nebudeme uvádět, lze ji nalézt ve zmíněné knize N. J. Vilenkina (1971).

Dalším z problémů historického vývoje byly konstrukce křivek, které nemají nikde tečnu. Jeden takový příklad pochází od holandského matematika van der Waerdena (viz Vilenkin 1971). Jedná se o uzavřenou lomenou čáru, která má vrchol v každém bodě. Výchozím prvkem konstrukce je rovnostranný trojúhelník. Každou jeho stranu rozdělíme na tři stejné části a nad středními částmi sestrojíme nové rovnostranné trojúhelníky, všechny ve vnější oblasti určené výchozím trojúhelníkem. Tím vznikne šesticípá hvězda. Každou ze shodných dvanácti stran této hvězdy nyní opět rozdělíme na tři stejné části a ve vnější oblasti hvězdy nad středními částmi sestrojíme další rovnostranné trojúhelníky, viz obrázek (původ Vilenkin 1971, s. 81).



Opakujeme-li popsaný proces dělení stran a sestrojování rovnostranných trojúhelníků do nekonečna (úvaha opět vyžaduje uznání aktuálního nekonečna), dostaneme lomenou čáru, která má v každém bodě vrchol.

Přehled zajímavých příkladů (kterých je samozřejmě velké množství a příspěvek obsahuje pouze výběr) zakončíme příkladem geometrického útvaru, který má konečný obvod, ale nulový obsah, přestože obsahuje nekonečně mnoho vnitřních bodů. Jedná se o tzv. Sierpińského koberec (viz opět Vilenkin 1971). Jeho konstrukci zahájíme čtvercem o délce strany rovné 1 (volba jednotky není podstatná). Všechny čtyři jeho strany rozdělíme na třetiny a sestrojíme příčky rovnoběžné se stranami v dělících bodech; tyto příčky rozdělí čtverec na devět shodných čtverců. Nyní vyjmeme vnitřek středního čtverce (žádná jeho strana neleží na stranách původního čtverce). Dále rozdělíme stejným způsobem každý ze zbylých osmi čtverců na devět shodných menších čtverců a z každého vyjmeme vnitřek střední části (všechny hranice čtverců při odstraňování ponecháváme). Původní čtverec nyní obsahuje 64 čtverců, jejichž obsah je roven $\frac{1}{81}$. Každý z těchto 64 čtverců stejným způsobem rozdělíme na devět částí a vyjmeme vnitřek střední části. Takto pokračujeme „do nekonečna“. Na následujících obrázcích (původ Vilenkin 1971, s. 85) jsou ilustrovány odstraněné části po třetím a čtvrtém kroku.



Uznáme-li aktuální nekonečno, můžeme si položit otázku, jak bude „vypadat“ výsledný útvar a jaký bude jeho obsah. Popis vzniklého geometrického útvaru (jehož obvod je roven obvodu výchozího čtverce, tedy čtyři) je výstižně popsán v publikaci N. J. Vilenkina (1971), s. 86: „Tento obrazec je podobný tkanině utkané šíleným tkalcem. Podél i napříč se táhnou nitě osnovy a útku a splétají se ve velmi symetrické a krásné vzory. Ale látka, kterou tak dostaneme, je velmi děravá - není v ní ani jeden souvislý kousek plochy, i z toho nejmenšího čtverečku byla vyjmuta střední část. A není vůbec zřejmé, čím tento koberec je – zda čarou nebo plochou. Na jedné straně neobsahuje ani jednu souvislou plošku a těžko tedy může být plochou, ale na druhé straně jsou jeho nitky setkány v tak složitý vzor, že těžko někdo řekne, že Sierpińského koberec je čára.“ Jako doklad neobvyklosti vzniklého útvaru odvodíme velikost jeho obsahu.

Výchozí čtverec má obsah 1. Po prvním kroku je obsah roven $\frac{8}{9}$. Po druhém kroku je obsah roven $\frac{64}{81}=\left(\frac{8}{9}\right)^2$, ve třetím kroku již jen $\frac{512}{729}=\left(\frac{8}{9}\right)^3$. Obecně platí, že po n-tém kroku je obsah roven $\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Provedeme-li postup nekonečněkrát, vypočítáme obsah jako limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$, která je rovna nule. Obsah Sierpińského koberce je tedy skutečně nula.

Aby nevznikl mylný dojem, že uznání aktuálního nekonečna vedlo v historii matematiky pouze ke zkoumání problémů pro „zábavu“, jak se mohou jevit některé z popsaných příkladů, uvedeme nyní populární formou tři situace, kdy je uznání aktuálního nekonečna nutné při výuce budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. V aritmetice se jedná o teorii kardinálních a ordinálních čísel. Např. při zavádění kardinálních čísel vycházíme ze systému všech konečných množin, na kterém je definována jistá ekvivalence. Bez uznání aktuálního nekonečna bychom žádný takový systém uvažovat nemohli. V geometrii se jedná o Jordanovu teorii míry. Při zavádění obsahu měřitelného rovinného útvaru je definováno jádro a obal tohoto útvaru, přičemž postupným zjemňováním sítě tvoříme rostoucí posloupnost jader a klesající posloupnost obalů daného útvaru. Blíží-li se délka strany čtverců sítě nule, je limita obou uvedených posloupností tatáž a je rovna míře daného rovinného útvaru (je-li měřitelný). Kdybychom neuznali aktuální nekonečno, nebylo by možné danou limitu určit a tím by nebylo možné definovat míru rovinného útvaru. Další, ve škole běžné, užití aktuálního nekonečna je při konstrukci iracionálních čísel, kdy je každé iracionální číslo postupně aproximováno zleva a zprava, přičemž dolní aproximace tvoří rostoucí posloupnost a horní aproximace klesající posloupnost. Iracionální číslo je pak společnou limitou obou těchto posloupností; např. pro číslo e platí pro každé $n\in N, n\neq 0$, nerovnosti

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Závěr

Závěrem příspěvku uveďme poznámku k zavádění pojmu nekonečna ve školské matematice. Na úrovni základní školy (zejména na 1. stupni) zřejmě úvahy o pojetí nekonečna význam nemají. Úroveň matematického nadhledu žáků neumožňuje vést diskuse na toto téma. Existují samozřejmě výjimky - s nadanými žáky je nutno pracovat individuálně. Jiná situace je na střední škole, to je však již námět pro jiný příspěvek.

Literatura

BERÁNEK, J. 2005. Několik poznámek k pojetí nekonečna ve vyučování matematice. In *Sborník příspěvků ze XXIII. vědeckého kolokvia.* Univerzita Obrany, Brno: CD–ROM, 5 s.

DRÁBEK, J. 1985. *Světonázorové problémy v matematice – II. díl.* Pedagogická fakulta v Plzni, Plzeň. 184 pp.

EISENMANN, P. 2001. Fenomén přímky a kružnice ve výuce matematiky na základní škole. In *Sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference – Matematika v príprave učitelov 1. stupňa základnej školy.* Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica: 171–173.

EISENMANN, P. 2002. Představy žáků o nekonečnu. In *Sborník příspěvků ze semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2002*, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha: 7–13.

EISENMANN, P. 2003. Dají se spočítat? Představy žáků a jejich učitelů o nekonečnu. In *Od činnosti k poznatku.* Západočeská univerzita, Plzeň: 91–94.

HEJNÝ, M. 1990. *Teória vyučovania matematiky.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava. 554 pp.

JIROTKOVÁ, D. 1998. Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky PdF UK. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 43*, 326–334.

KONFOROVIČ, A. G. 1989. *Významné matematické úlohy.* SPN, Praha. 208 pp.

VILENKIN, N. J. 1971. *Neznámý svět nekonečných množin.* SNTL, Praha. 115 pp.